गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : **तीन** घंटे

*Time Allowed : **Three Hours***

अधिकतम अंक : **250**

*Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) मान लीजिए कि $x_1 = 2$ और $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 20}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ है । दर्शाइए कि अनुक्रम $x_1, x_2, x_3, \ldots$ अभिसारी है ।

Let $x_1 = 2$ and $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 20}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Show that the sequence $x_1, x_2, x_3, \ldots$ is convergent. *10*

(b) मान लीजिए कि G कोटि n का एक समूह है । दर्शाइए कि G क्रमचय समूह S_n के एक उपसमूह के समरूपी है ।

Let G be a group of order n. Show that G is isomorphic to a subgroup of the permutation group S_n. *10*

(c) $\frac{x}{\sin x}$ का अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर उच्चक और निम्नक मान ज्ञात कीजिए ।

Find the supremum and the infimum of $\frac{x}{\sin x}$ on the interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. *10*

(d) वे सभी सर्वत्र वैश्लेषिक फलनें f(z) ज्ञात कीजिए जिनके लिए 0 फलन $f\left(\frac{1}{z}\right)$ की अपनेय विचित्रता है ।

Determine all entire functions f(z) such that 0 is a removable singularity of $f\left(\frac{1}{z}\right)$. *10*

(e) ग्राफी विधि के इस्तेमाल के द्वारा

$$2x + y$$

का उच्चतम मान, बशर्ते

$$4x + 3y \leq 12$$
$$4x + y \leq 8$$
$$4x - y \leq 8$$
$$x, y \geq 0$$

ज्ञात कीजिए ।

Using graphical method, find the maximum value of

$$2x + y$$

subject to

$$4x + 3y \leq 12$$
$$4x + y \leq 8$$
$$4x - y \leq 8$$
$$x, y \geq 0.$$

10

Q2. (a) मान लीजिए कि

$$f(t) = \int_0^t [x]\, dx\,,$$

जहाँ [x] सबसे बड़ी पूर्ण संख्या है, जो x से छोटी या x के बराबर है, को दर्शाता है ।

(i) निर्धारित कीजिए सभी वास्तविक संख्याएँ t, जहाँ f अवकलनीय है ।

(ii) निर्धारित कीजिए सभी वास्तविक संख्याएँ t, जहाँ f संतत है लेकिन अवकलनीय नहीं है ।

Let

$$f(t) = \int_0^t [x]\, dx\,,$$

where [x] denotes the largest integer less than or equal to x.

(i) Determine all the real numbers t at which f is differentiable.

(ii) Determine all the real numbers t at which f is continuous but not differentiable. *15*

(b) परिरेखा (कन्टूर) समाकल विधि के इस्तेमाल के द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-ma}.$$

Using contour integral method, prove that

$$\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-ma}.$$ *15*

(c) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है और F[X] सभी बहुपद, जो F में एकल चर X में हैं, का वलय द्योतित करता है । $f(X), g(X) \in F[X]$ बशर्ते $g(X) \neq 0$ के लिए, दर्शाइए कि ऐसे $q(X), r(X) \in F(X)$ हैं जिनके लिए (r(X)) का घात (g(X)) के घात से छोटा है और

$$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X).$$

Let F be a field and F[X] denote the ring of polynomials over F in a single variable X. For $f(X), g(X) \in F[X]$ with $g(X) \neq 0$, show that there exist $q(X), r(X) \in F[X]$ such that degree (r(X)) < degree (g(X)) and

$$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X).$$ *20*

Q3. (a) दर्शाइए कि समूहें $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ एवं $\mathbb{Z}_{35}$ समरूपी हैं ।

Show that the groups $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ and $\mathbb{Z}_{35}$ are isomorphic. *15*

(b) मान लीजिए कि $f = u + iv$ एकक डिस्क $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ पर एक विश्लेषिक फलन है । दर्शाइए कि D के सभी बिन्दुओं पर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ है ।}$$

Let $f = u + iv$ be an analytic function on the unit disc $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

at all points of D. *15*

(c) एकधा विधि के द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

बशर्ते कि

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$2x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Solve the following linear programming problem by simplex method :

Maximize

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

subject to

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$2x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

20

Q4. (a) फलन $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ एवं $n \geq 1$ के लिए, मान लीजिए कि $f^{(n)}$ फलन f का nवाँ अवकलज दर्शाता है और $f^{(0)} = f$ है । मान लीजिए कि f एक ऐसा सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है जिसके लिए किसी $n \geq 1$ के लिए, $f^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right) = 0$, सभी $k = 1, 2, 3, \ldots$, के लिए । दर्शाइए कि f एक बहुपद है ।

For a function $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ and $n \geq 1$, let $f^{(n)}$ denote the n^{th} derivative of f and $f^{(0)} = f$. Let f be an entire function such that for some $n \geq 1$, $f^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ for all $k = 1, 2, 3, \ldots$. Show that f is a polynomial. *15*

(b) निम्नलिखित परिवहन समस्या के लिए, वोगेल की सन्निकटन विधि के द्वारा, आरंभिक आधारिक सुसंगत हल ज्ञात कीजिए तथा लागत ज्ञात कीजिए ।

गन्तव्य

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
	O_1	4	7	0	3	6	14	
उद्गम	O_2	1	2	-3	3	8	9	पूर्ति
	O_3	3	-1	4	0	5	17	
		8	3	8	13	8		

माँग

Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem using Vogel's approximation method and find the cost. 15

Destinations

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		
	O_1	4	7	0	3	6	14	
Origins	O_2	1	2	-3	3	8	9	Supply
	O_3	3	-1	4	0	5	17	
		8	3	8	13	8		

Demand

(c) मान लीजिए कि $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ एक वास्तविक संख्याओं की सप्रतिबन्ध अभिसारी श्रेणी है । दर्शाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ का एक पुनर्विन्यास $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ होगा जो 100 को अभिसरित होता है ।

Let $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ be a conditionally convergent series of real numbers. Show that there is a rearrangement $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ of the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ that converges to 100. 20

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) $(D^2 - 2DD' + D'^2)\, z = e^{x + 2y} + x^3 + \sin 2x$ को हल कीजिए,
जहाँ

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ D' \equiv \frac{\partial}{\partial y},\ D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ D'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ हैं ।}$$

Solve $(D^2 - 2DD' + D'^2)\, z = e^{x + 2y} + x^3 + \sin 2x$,
where

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ D' \equiv \frac{\partial}{\partial y},\ D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ D'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$ 10

(b) गाउस-जॉर्डन विधि के मुख्य सोपानों की व्याख्या कीजिए तथा इस विधि का इस्तेमाल करते हुए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।

Explain the main steps of the Gauss-Jordan method and apply this method to find the inverse of the matrix 10

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

(c) बूलीय अभिगृहीत नियमों का इस्तेमाल करते हुए बूलीय व्यंजक

$$z\,(y + z)\,(x + y + z)$$

को इसके सरलतम रूप में लिखिए । सरलीकरण के दौरान इस्तेमाल होने वाले नियमों का उल्लेख कीजिए । दिए गए व्यंजक तथा उसके सरलतम रूप के लिए सत्यमान सारणी बनाकर अपने परिणाम को सत्यापित कीजिए ।

Write the Boolean expression

$$z\,(y + z)\,(x + y + z)$$

in its simplest form using Boolean postulate rules. Mention the rules used during simplification. Verify your result by constructing the truth table for the given expression and for its simplest form. 10

(d) माना xy-समतल में Γ एक संवृत वक्र है तथा S उसके वक्र Γ द्वारा सीमाबद्ध क्षेत्र को निर्दिष्ट करता है । माना कि

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y) \ \forall \ (x, y) \in S \text{ है ।}$$

यदि S के प्रत्येक बिन्दु (x, y) पर f निर्धारित है तथा S की सीमा Γ पर w निर्धारित है, तो सिद्ध कीजिए कि इन शर्तों को पूरा करने वाला कोई भी हल $w = w(x, y)$ एकमात्र हल है ।

Let Γ be a closed curve in xy-plane and let S denote the region bounded by the curve Γ. Let

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y) \ \forall \ (x, y) \in S.$$

If f is prescribed at each point (x, y) of S and w is prescribed on the boundary Γ of S, then prove that any solution $w = w(x, y)$, satisfying these conditions, is unique. *10*

(e) दर्शाइए कि एक दीर्घवृत्ताकार क्षेत्रफल, जिसका द्रव्यमान M है तथा अर्धाक्ष a व b हैं, का अर्ध-व्यास, जिसकी लम्बाई r है, के इर्दगिर्द जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$ होगा । आगे सिद्ध कीजिए कि स्पर्शरिखा के इर्दगिर्द जड़त्व आघूर्ण $\frac{5M}{4} p^2$ होगा, जहाँ p दीर्घवृत्त के केन्द्र से स्पर्शरिखा की लम्बवत् दूरी है ।

Show that the moment of inertia of an elliptic area of mass M and semi-axis a and b about a semi-diameter of length r is $\frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$. Further, prove that the moment of inertia about a tangent is $\frac{5M}{4} p^2$, where p is the perpendicular distance from the centre of the ellipse to the tangent. *10*

Q6. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$2\,(pq + yp + qx) + x^2 + y^2 = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए ।

Find a complete integral of the partial differential equation

$$2\,(pq + yp + qx) + x^2 + y^2 = 0.$$ 15

(b) दिए गए समदूरस्थ मान u_{-1}, u_0, u_1 और u_2 के लिए, एक मान लग्रांज फॉर्मूला से अंतर्वेशित किया जाता है । दर्शाइए कि इसको

$$u_x = yu_0 + xu_1 + \frac{y\,(y^2-1)}{3\,!}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{x\,(x^2-1)}{3\,!}\,\Delta^2 u_0$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $x + y = 1$ है ।

For given equidistant values u_{-1}, u_0, u_1 and u_2, a value is interpolated by Lagrange's formula. Show that it may be written in the form

$$u_x = yu_0 + xu_1 + \frac{y\,(y^2-1)}{3\,!}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{x\,(x^2-1)}{3\,!}\,\Delta^2 u_0,$$

where $x + y = 1$. 15

(c) दो एकसमान छड़ों AB, AC को, जिसमें प्रत्येक का द्रव्यमान m तथा लम्बाई 2a है, मसृण तरीक़े से A पर कब्ज़े के साथ जोड़ा गया है तथा वे क्षैतिज समतल पर गतिमान हैं । समय t पर, समतल में स्थिर लंब अक्ष Ox, Oy के सन्दर्भ में छड़ों का द्रव्यमान केन्द्र बिन्दु (ξ, η) पर है तथा छड़ें Ox के साथ $\theta \pm \phi$ का कोण बनाती हैं । सिद्ध कीजिए कि तंत्र की गतिज ऊर्जा

$$m\left[\,\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \left(\frac{1}{3} + \sin^2\phi\right)a^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{3} + \cos^2\phi\right)a^2\,\dot{\phi}^2\right] \text{ है ।}$$

साथ ही तंत्र के लिए गति के लग्रांज समीकरणों को भी व्युत्पन्न कीजिए, यदि घटकों [X, Y] सहित एक बाहरी बल अक्षों के साथ-साथ, A बिन्दु पर क्रिया करता है ।

Two uniform rods AB, AC, each of mass m and length 2a, are smoothly hinged together at A and move on a horizontal plane. At time t, the mass centre of the rods is at the point (ξ, η) referred to fixed perpendicular axes Ox, Oy in the plane, and the rods make angles $\theta \pm \phi$ with Ox. Prove that the kinetic energy of the system is

$$m\left[\,\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \left(\frac{1}{3} + \sin^2\phi\right)a^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{3} + \cos^2\phi\right)a^2\,\dot{\phi}^2\right].$$

Also derive Lagrange's equations of motion for the system if an external force with components [X, Y] along the axes acts at A. 20

Q7. (a) समीकरण

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$$

को विहित रूप में समानीत कीजिए और अतएव इसका हल ज्ञात कीजिए ।

Reduce the equation

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$$

to canonical form and hence solve it. *15*

(b) सूत्र

$$\int_a^b y \, dx = \frac{3h}{8} \left[(y_0 + y_n) + 3 \left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{n-1} \right) + 2 \left(y_3 + y_6 + \dots + y_{n-3} \right) \right]$$

को व्युत्पन्न कीजिए । क्या n पर कोई प्रतिबन्ध है ? उस शर्त को लिखिए । सिम्प्सन के $\frac{3}{8}$ नियम के मामले में त्रुटि परिबंध क्या है ?

Derive the formula

$$\int_a^b y \, dx = \frac{3h}{8} \left[(y_0 + y_n) + 3 \left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{n-1} \right) + 2 \left(y_3 + y_6 + \dots + y_{n-3} \right) \right].$$

Is there any restriction on n ? State that condition. What is the error bound in the case of Simpson's $\frac{3}{8}$ rule ? *20*

(c) एक बॉयलर से एक शंक्वाकार नलिका में से जिसके सिरों के व्यास D तथा d हैं, धारा तेज़ी से निकल रही है । यदि V तथा υ धारा के संगत-वेग हों तथा यदि माना जाए कि गति अपरिवर्ती है तथा शंकु-शीर्ष से अपसारित हो रही है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\upsilon}{V} = \frac{D^2}{d^2} \, e^{(\upsilon^2 - V^2)/2K} \text{ होगा,}$$

जहाँ K घनत्व द्वारा विभाजित दाब है तथा अपरिवर्ती है ।

A stream is rushing from a boiler through a conical pipe, the diameters of the ends of which are D and d. If V and υ be the corresponding velocities of the stream and if the motion is assumed to be steady and diverging from the vertex of the cone, then prove that

$$\frac{\upsilon}{V} = \frac{D^2}{d^2} \, e^{(\upsilon^2 - V^2)/2K},$$

where K is the pressure divided by the density and is constant. *15*

Q8. (a) दिया हुआ है एकविमीय तरंग समीकरण,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad t > 0,$$

जहाँ $c^2 = \frac{T}{m}$, T तार में अपरिवर्ती तनाव है तथा m तार का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान है ।

(i) उपर्युक्त तरंग समीकरण का यथोचित हल ज्ञात कीजिए ।

(ii) प्रतिबन्धों

$y(0, t) = 0, \; y(l, t) = 0$ सभी t के लिए

तथा $\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \; y(x, 0) = a \sin\frac{\pi x}{l}, \; 0 < x < l, a > 0$

के साथ भी हल निकालिए ।

Given the one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad t > 0,$$

where $c^2 = \frac{T}{m}$, T is the constant tension in the string and m is the mass per unit length of the string.

(i) Find the appropriate solution of the above wave equation.

(ii) Find also the solution under the conditions

$y(0, t) = 0, \; y(l, t) = 0$ for all t

and $\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \; y(x, 0) = a \sin\frac{\pi x}{l}, \; 0 < x < l, a > 0.$ *20*

(b) न्यूटन-रैफ्सन विधि के लिए प्रवाह चार्ट के रूप में एक ऐल्गोरिथ्म लिखिए । इस विधि की विफलता की स्थितियों का वर्णन कीजिए ।

Write an algorithm in the form of a flow chart for Newton-Raphson method. Describe the cases of failure of this method. *15*

(c) यदि (x, y, z) बिन्दु पर असंपीड्य तरल का वेग

$$\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right), \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

के द्वारा दत्त है, तो सिद्ध कीजिए कि द्रव गति सम्भव है तथा वेग विभव $\frac{z}{r^3}$ है । और आगे, धारा-रेखाओं का भी निर्धारण कीजिए ।

If the velocity of an incompressible fluid at the point (x, y, z) is given by

$$\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right), \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

then prove that the liquid motion is possible and that the velocity potential is $\frac{z}{r^3}$. Further, determine the streamlines. *15*