वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र II)

MATHEMATICS (Paper II)

निर्धारित समय : तीन घण्टे *Time Allowed : Three Hours*	अधिकतम अंक : 250 *Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है और H तथा K, G के उप-समूह हैं, ऐसा कि $K \subset H$ ।
दर्शाइए $(G : K) = (G : H)(H : K)$ ।

Let G be a finite group, H and K subgroups of G such that $K \subset H$. Show that $(G : K) = (G : H)(H : K)$. 10

1.(b) दर्शाईए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & , \quad (x, y) \neq (1, -1), (1, 1) \\ 0 & , \quad (x, y) = (1, 1), (1, -1) \end{cases}$$

संतत और बिन्दु $(1, -1)$ पर अवकलनीय है ।

Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & , \quad (x, y) \neq (1, -1), (1, 1) \\ 0 & , \quad (x, y) = (1, 1), (1, -1) \end{cases}$$

is continuous and differentiable at $(1, -1)$. 10

1.(c) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)} dx, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

Evaluate

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)} dx, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$ 10

1.(d) मान लीजिये $\mathbb{C}$ में D प्रक्षेत्र पर $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन है और समीकरण
$Im\, f(z) = (Re\, f(z))^2$, $Z \in D$ को संतुष्ट करता है । दर्शाइए कि D में $f(z)$ अचर है ।

Suppose $f(z)$ is analytic function on a domain D in $\mathbb{C}$ and satisfies the equation $Im\, f(z) = (Re\, f(z))^2$, $Z \in D$. Show that $f(z)$ is constant in D. 10

1.(e) ग्राफी विधि के इस्तेमाल के द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए ।
अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 3x_1 + 2x_2$
बशर्ते कि

$$x_1 - x_2 \geq 1,$$
$$x_1 + x_3 \geq 3$$
और $$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Use graphical method to solve the linear programming problem.
Maximize $Z = 3x_1 + 2x_2$
subject to

$$x_1 - x_2 \geq 1,$$
$$x_1 + x_3 \geq 3$$
and $$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$ 10

2.(a) यदि G और H परिमित समूह हैं जिनकी कोटियां सापेक्षतः अभाज्य हैं, तो सिद्ध करें कि G से H तक केवल एक ही समाकारिता होमोमोर्फिज्म है जो कि तुच्छ है ।
If G and H are finite groups whose orders are relatively prime, then prove that there is only one homomorphism from G to H, the trivial one. 10

2.(b) समूह Z_{12} के सभी विभाग समूह लिखिए ।
Write down all quotient groups of the group Z_{12}. 10

2.(c) अवकलों का उपयोग करते हुए, $f(4{\cdot}1, 4{\cdot}9)$ का सन्निकट मान ज्ञात करें, जहाँ

$$f(x, y) = \left(x^3 + x^2 y\right)^{\frac{1}{2}}$$ है ।

Using differentials, find an approximate value of $f(4{\cdot}1, 4{\cdot}9)$ where

$$f(x, y) = \left(x^3 + x^2 y\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 15

2.(d) दर्शाइए कि वियुक्त विचित्र बिन्दु z_0, फलन $f(z)$ का m कोटि का पोल होगा यदि और केवल यदि $f(z)$ को $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $\phi(z)$ विश्लेषिक है और z_0 पर शून्येतर है ।

इसके अलावा $\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ यदि $m \geq 1$ ।

Show that an isolated singular point z_0 of a function $f(z)$ is a pole of order m if and only if $f(z)$ can be written in the form $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$

where $\phi(z)$ is analytic and non zero at z_0.

Moreover $\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ if $m \geq 1$. 15

3.(a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}\,(-\infty, \infty)$

$n = 1, 2, 3, ...$

के एकसमान अभिसरण पर चर्चा करें।

Discuss the uniform convergence of

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}\,(-\infty, \infty)$

$n = 1, 2, 3, ...$ 15

3.(b) एकधा विधि का इस्तेमाल करते हुए रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिये :
न्यूनतमीकरण कीजिए $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
बशर्ते कि

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$

और $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Solve the linear programming problem using Simplex method.
Minimize $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
subject to

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$

and $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ 15

3.(c) समाकल $\int_c Re(z^2)dz$ का मूल्यांकन वक्र C के साथ-साथ 0 से $2+4i$ तक करें, जहाँ C एक परवलय $y = x^2$ है।

Evaluate the integral $\int_c Re(z^2)dz$ from 0 to $2+4i$ along the curve C where C is a parabola $y = x^2$. 10

3.(d) मानिए कि a, यूक्लिडीयन वलय R का एक अखंडनीय अवयव है तब सिद्ध करें कि $R/(a)$ एक क्षेत्र है।
Let a be an irreducible element of the Euclidean ring R, then prove that $R/(a)$ is a field. 10

4.(a) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ का अधिकतम मान ज्ञात करें बशर्ते कि गौण शर्त $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, $(x, y, z > 0)$ है।
Find the maximum value of $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ subject to the subsidiary condition $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, $(x, y, z > 0)$. 15

4.(b) फलन $f(z)=\frac{1}{(e^z-1)}$ के बिन्दु $z=0$ के इर्दगिर्द लॉरेंट श्रेणी विस्तार के, प्रथम तीन पद प्राप्त करें, जो कि क्षेत्र $0<|z|<2\pi$ में वैध है ।

Obtain the first three terms of the Laurent series expansion of the function $f(z)=\frac{1}{(e^z-1)}$ about the point $z=0$ valid in the region $0<|z|<2\pi$. 10

4.(c) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{l_n x}dx$ के अभिसरण पर चर्चा कीजिए ।

Discuss the convergence of $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{l_n x}dx$. 15

4.(d) निम्नलिखित एल. पी. पी. पर विचार करें,
अधिकतमीकरण कीजिए $Z=2x_1+4x_2+4x_3-3x_4$
बशर्ते कि
$x_1+x_2+x_3=4$
$x_1+4x_2+x_4=8$
और $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$
प्रति समस्या का उपयोग करते हुए, सत्यापित करें कि बुनियादी समाधान (x_1, x_2) इष्टतम नहीं है ।

Consider the following LPP,
Maximize $Z=2x_1+4x_2+4x_3-3x_4$
subject to
$x_1+x_2+x_3=4$
$x_1+4x_2+x_4=8$
and $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$
Use the dual problem to verify that the basic solution (x_1, x_2) is not optimal. 10

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) निम्नलिखित व्यंजक :
$\psi(x^2+y^2+2z^2, y^2-2zx)=0$
के द्वारा दिए गए पृष्ठ कुल का एक आंशिक अवकल समीकरण बनायें ।
Form a partial differential equation of the family of surfaces given by the following expression :
$\psi(x^2+y^2+2z^2, y^2-2zx)=0$. 10

5.(b) न्यूटन-रेफ्सन विधि का उपयोग करते हुऐ अबीजीय (ट्रांसिडैंटल) समीकरण $x\log_{10}x=1{\cdot}2$ का वास्तविक मूल दशमलव के तीन स्थानों तक सही निकालें ।
Apply Newton-Raphson method, to find a real root of transcendental equation $x\log_{10}x=1{\cdot}2$, correct to three decimal places. 10

5.(c) एक $2a$ लम्बाई की एक एकसमान छड़ OA अपने सिरे O के इर्दगिर्द घूमने के लिये स्वतन्त्र है, जो O से ऊर्ध्वाधर OZ के परितः ω कोणीय वेग से घूमती है, और OZ से निश्चित कोण α बनाती है; α कोण का मान ज्ञात कीजिए ।

A uniform rod OA, of length $2a$, free to turn about its end O, revolves with angular velocity ω about the vertical OZ through O, and is inclined at a constant angle α to OZ; find the value of α. 10

5.(d) चौथी कोटि की रुन्गे-कुट्टा विधि का उपयोग करके $y(0)=1$ के साथ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ को $x=0{\cdot}2$ पर हल करें । परिकलन के लिये चार दशमलव स्थानों और अन्तराल लम्बाई (स्टैप लैंथ) $0{\cdot}2$ का उपयोग कीजिए ।

Using Runge-Kutta method of fourth order, solve $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ with $y(0)=1$ at $x=0{\cdot}2$. Use four decimal places for calculation and step length $0{\cdot}2$. 10

5.(e) ट्रेपेजाइडल नियम के इस्तेमाल के द्वारा समाकल $y=\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ का मूल्यांकन करने के लिये, एक प्रवाह चार्ट बनाइए तथा एक बुनियादी एल्गोरिथ्म (फोर्ट्रान/ C / C^{++} में) लिखें ।

Draw a flow chart and write a basic algorithm (in FORTRAN/C/C^{++}) for evaluating $y=\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ using Trapezoidal rule. 10

6.(a) प्रथम कोटि रैखिककल्प आंशिक अवकल समीकरण

$x\frac{\partial u}{\partial x}+(u-x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y$ में $x>0, -\infty<y<\infty$ को $u=1+y$ के साथ $x=1$ पर अभिलाक्षणिक विधि के द्वारा हल करें ।

Solve the first order quasilinear partial differential equation by the method of characteristics :

$x\frac{\partial u}{\partial x}+(u-x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y$ in $x>0, -\infty<y<\infty$ with $u=1+y$ on $x=1$. 15

6.(b) अधोलिखित संख्याओं के समतुल्यों को उनके सम्मुख दरशाई गई विशिष्ट संख्या पद्धति में ज्ञात कीजिए :

(i) पूर्णांक 524 को द्विआधारी पद्धति में ।

(ii) 101010110101·101101011 को अष्टाधारी पद्धति में ।

(iii) दशमलव 5280 को षड्दशमलव पद्धति में ।

(iv) अज्ञात संख्या ज्ञात कीजिए $(1101{\cdot}101)_8 \rightarrow (?)10$ ।

Find the equivalent numbers given in a specified number to the system mentioned against them :

(i) Integer 524 in binary system.

(ii) 101010110101·101101011 to octal system.

(iii) decimal number 5280 to hexadecimal system.

(iv) Find the unknown number $(1101 \cdot 101)_8 \rightarrow (?)10$. 15

6.(c) एक त्रिज्या a तथा परिभ्रमण त्रिज्या k वाला गोलाकार सिलिन्डर बिना फिसले, एक b त्रिज्या वाले, स्थिर खोखले सिलिन्डर में लुढ़कता (roll) है । दर्शाएँ कि इनकी अक्षों में से तल एक $(b-a)\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)$ लम्बाई वाले गोलाकार लोलक में चलता है ।

A circular cylinder of radius a and radius of gyration k rolls without slipping inside a fixed hollow cylinder of radius b. Show that the plane through axes moves in a circular pendulum of length $(b-a)\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)$. 20

7.(a) हेमिल्टन समीकरण का उपयोग करते हुए, एक गोला, जो कि एक खुरदरी आनत तल (inclined plane) पर नीचे की ओर लुढ़क रहा है, का त्वरण ज्ञात करें, यदि x, तल पर निश्चित बिन्दु से गोले के सम्पर्क बिन्दु की दूरी है ।

Using Hamilton's equation, find the acceleration for a sphere rolling down a rough inclined plane, if x be the distance of the point of contact of the sphere from a fixed point on the plane. 15

7.(b) निम्नलिखित समीकरणों को गाउस-साईडल पुनरावृत्ति विधि से हल, दशमलव के सही तीन स्थानों तक करें :

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 17, \\ 3x + 20y - z &= -18, \\ 2x - 3y + 20z &= 25. \end{aligned}$$

Apply Gauss-Seidel iteration method to solve the following system of equations :

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 17, \\ 3x + 20y - z &= -18, \\ 2x - 3y + 20z &= 25, \text{ correct to three decimal places.} \end{aligned}$$ 15

7.(c) निम्नलिखित द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण को विहित रूप में समानीत करें और सामान्य हल ज्ञात करें :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x \text{ ।}$$

Reduce the following second order partial differential equation to canonical form and find the general solution :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x.$$ 20

8.(a) दिये गये बूलीय व्यंजक के लिए

$X = AB + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$

(i) व्यंजक के लिये तार्किक आरेख खींचें ।

(ii) व्यंजक न्यूनतम करें ।

(iii) समानीत व्यंजक के लिये तार्किक आरेख खींचें ।

Given the Boolean expression

$X = AB + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$

(i) Draw the logical diagram for the expression.

(ii) Minimize the expression.

(iii) Draw the logical diagram for the reduced expression. 15

8.(b) एक त्रिज्या R का गोला, जिसका केन्द्र स्थिर है वह घनत्व ρ के एक अनंत असंपीड्य तरल में त्रिज्यतः कंपन करता है । अगर अनंत पर दबाव Π हो, तो दर्शाएं कि गोले की सतह पर किसी समय t पर दाब

$$\Pi + \frac{1}{2}\rho\left\{\frac{d^2R^2}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right\} \text{ होगा ।}$$

A sphere of radius R, whose centre is at rest, vibrates radially in an infinite incompressible fluid of density ρ, which is at rest at infinity. If the pressure at infinity is Π, so that the pressure at the surface of the sphere at time t is

$$\Pi + \frac{1}{2}\rho\left\{\frac{d^2R^2}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right\}.$$ 15

8.(c) दो स्रोतों, प्रत्येक m शक्ति का $(-a, 0)$, $(a, 0)$ बिन्दुओं पर तथा $2m$ शक्ति का सिन्क मूल बिन्दु पर स्थित है । दर्शाएं कि धारा-रेखाएं वक्र $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$ हैं । यहां λ चर एक पैरामीटर है ।

और ये भी दर्शाएं कि तरल गति किसी भी बिन्दु पर $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$ है, जहां r_1, r_2, r_3 स्रोतों से और सिंक से बिन्दुओं की क्रमशः दूरिया हैं ।

Two sources, each of strength m, are placed at the points $(-a, 0)$, $(a, 0)$ and a sink of strength $2m$ at origin. Show that the stream lines are the curves $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$, where λ is a variable parameter.

Show also that the fluid speed at any point is $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$, where r_1, r_2 and r_3 are the distances of the points from the sources and the sink, respectively. 20