CHAHAL ACADEMY
LEARN TODAY! LEAD TOMORROW!
96259-93995

सांख्यिकी (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे	अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशेष अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू॰ सी॰ ए॰) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

प्रसामान्य बंटन सारणी पृष्ठ सं॰ **9** में दी गई है।

STATISTICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by each question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

Normal Distribution Table is given in Page No. **9**.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) एक बॉक्स में 1 से N संख्यांकित N टिकट रखे गए हैं। एक लड़का यादृच्छिक रूप से बॉक्स में से n टिकट निकालता है। यदि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ निकाले गए टिकटों के नम्बर हों, तो $E\{\max X_i\}$ क्या है?

A box contains N tickets numbered 1 to N. A boy draws n tickets from the box randomly. If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be the numbers of tickets drawn, what is $E\{\max X_i\}$? 10

(b) अगर F एक असंतत यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन फलन है, तो सिद्ध कीजिए कि फलन F^n तथा $1-(1-F)^n$ भी प्रायिकता बंटन फलन हैं।

Let F be a probability distribution function of a discrete random variable. Prove that the functions F^n and $1-(1-F)^n$ are also probability distribution functions. 10

(c) यदि Z_1 तथा Z_2 दो स्वतंत्र मानक प्रसामान्य चर हों, तो दर्शाइए कि अनुपात $\frac{Z_1}{|Z_2|}$ का बंटन कौशी होगा जिसका प्रायिकता घनत्व फलन $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$ है।

If Z_1 and Z_2 be two independent standard normal variables, show that the distribution of the ratio $\frac{Z_1}{|Z_2|}$ is Cauchy with probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

10

(d) प्रायिकता बंटन $p(x; \theta)$, $x = 2, 3, 4, 5$ एवं $\theta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ पर विचार कीजिए। समष्टि से आमाप 1 का एक प्रतिदर्श लिया जाता है और यह 3 प्राप्त होता है। θ का अधिकतम संभाविता आकल प्राप्त कीजिए।

Consider the probability distribution $p(x; \theta)$, $x = 2, 3, 4, 5$ and $\theta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. A sample of size 1 is drawn from the population and it is found to be 3. Obtain the maximum likelihood estimate of θ. 10

x	2	3	4	5
$p\left(x; \theta = \frac{1}{4}\right)$	0·25	0·25	0·25	0·25
$p\left(x; \theta = \frac{1}{2}\right)$	0·30	0·40	0·15	0·15
$p\left(x; \theta = \frac{3}{4}\right)$	0·10	0·30	0·45	0·15

(e) माना कि एक यादृच्छिक चर X है, जिसका प्रायिकता द्रव्यमान फलन (p.m.f.) $f(x; \theta)$, $x = 0, 1, ..., 5$; $\theta = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ है। निम्न सारणी में $f(x; \theta)$ के मान दिए हुए हैं। $\alpha = \frac{6}{32}$ सार्थकता स्तर पर वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \theta = \frac{3}{4}$ के विरुद्ध निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ के परीक्षण के लिए सर्वोत्तम क्रांतिक क्षेत्र प्राप्त कीजिए।

Consider a random variable X with p.m.f. $f(x; \theta)$, $x = 0, 1, ..., 5$; $\theta = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. The following table gives the values of $f(x; \theta)$. Obtain the best critical region to test the null hypothesis $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ against $H_1 : \theta = \frac{3}{4}$ at level of significance $\alpha = \frac{6}{32}$. 10

x	0	1	2	3	4	5
$f\left(x; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
$f\left(x; \frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

2. (a) n स्वतंत्र बर्नूली अभिप्रयोगों में सफलताओं की एक सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

What is the probability of an even number of successes in n independent Bernoulli trials? 15

(b) आपने एक दुकान से रोशनी वाले बल्बों का एक बॉक्स खरीदा। आपको ज्ञात है कि सभी बल्ब या तो अल्प आयु वाले हैं, जिनकी माध्य आयु 500 घंटे हैं या फिर दीर्घ आयु वाले हैं, जिनकी माध्य आयु 2500 घंटे हैं। लेकिन आप कुछ भी नहीं कह सकते क्योंकि बॉक्स पर कोई लेबल नहीं लगा था।

क्योंकि आपने इस दुकान से पहले कभी खरीदारी नहीं की है, इसलिए प्रारम्भ में आपको नहीं मालूम है कि आपने दीर्घ आयु वाले बल्ब या वैकल्पिक सस्ते बल्ब खरीदे हैं।

लगभग 300 घंटों के बाद आपने 5 बल्ब जलते हुए पाए। एक बल्ब की आयु को बंटन चरघातांकी मानते हुए आपके द्वारा खरीदे गए बल्बों के दीर्घ आयु वाले होने की प्रायिकता का निर्धारण आप कैसे करेंगे?

You bought a box of lightbulbs from a shop. You know that the bulbs are all either short-life bulbs with a mean life of 500 hours or long-life bulbs with a mean life of 2500 hours, but you cannot tell which, because there was no label on the box.

As you have not shopped at this shop before, you initially have no opinion as to whether you have been sold long-life bulbs or the cheaper alternative.

After approximately 300 hours you find that 5 bulbs are alive. Assuming that the life of an individual lightbulb has an exponential distribution, how would you now assess the probability that you bought long-life bulbs? 20

(c) यदि अन्तराल (0, 1) से 20 यादृच्छिक संख्याएँ स्वतंत्र रूप से चुनी गयी हों, तो इन संख्याओं का योग कम-से-कम 8 होने की प्रायिकता लगभग क्या है?

If 20 random numbers are selected independently from the interval (0, 1), what is the approximate probability that the sum of these numbers is at least 8? 15

3\. *(a)* एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $(X_1, X_2, ..., X_n)$ प्रसामान्य बंटन $N(\mu, \sigma^2)$ से लिया गया है, जिसके सभी प्राचल अज्ञात हैं। संभाविता फलन $L(\mu, \sigma^2)$ लिखिए। सभी (μ, σ^2) के लिए दर्शाइए कि

$$L\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\,,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right) \geq L(\mu, \sigma^2)$$

तथा टिप्पणी कीजिए। अब किसी $\varepsilon > 0$ के लिए

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\}$$

मालूम कीजिए एवं अतः स्थापित कीजिए कि μ का एक संगत आकलक $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ है।

Given a random sample $(X_1, X_2, ..., X_n)$ from $N(\mu, \sigma^2)$ with all parameters unknown. Write down the likelihood function $L(\mu, \sigma^2)$. Show that for all (μ, σ^2)

$$L\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\,,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right) \geq L(\mu, \sigma^2)$$

and comment. Now find for any $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\}$$

and hence establish that $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ is a consistent estimator of μ. 20

(b) 10 विवाहित जोड़ों के आयु में कोई अंतर न होने की परिकल्पना का परीक्षण, प्रतिदर्श आँकड़ों के लिए 10% सार्थकता-स्तर पर मान-विटनी U-परीक्षण का प्रयोग करते हुए कीजिए। (प्रसामान्य प्रायिकता समाकल सारणी का उपयोग कीजिए) :

	आयु (वर्षों में)									
पुरुष	26	43	35	38	33	42	40	44	25	31
महिला	47	48	34	34	47	35	32	35	30	44

Test the hypothesis of no difference between the ages of 10 married couples using Mann-Whitney U-test for the sample data at 10% level of significance. (Use normal probability integral table) : 15

	Age (in years)									
Male	26	43	35	38	33	42	40	44	25	31
Female	47	48	34	34	47	35	32	35	30	44

(c) एक बिजली के बल्ब की आयु, X (घंटों में), का बंटन चरघातांकी है, जिसकी माध्य आयु $\frac{1}{\theta}$ है, जहाँ $\theta(>0)$ एक अज्ञात प्राचल है। माध्य 0·8 तथा मानक विचलन 2 वाले गामा बंटन (α, λ), θ का पूर्व बंटन है। आमाप 5 बल्बों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की औसत आयु 3·8 घंटा है। वर्ग त्रुटि हानि फलन का उपयोग करते हुए θ का बेज़ आकल निकालिए।

The life of an electric bulb, X (in hours), follows the exponential distribution with mean life $\frac{1}{\theta}$, where $\theta(>0)$ is an unknown parameter. The prior distribution of θ has a gamma distribution (α, λ) with mean 0·8 and standard deviation 2. The average life of a random sample of size 5 bulbs is 3·8 hours. Calculate the Bayes' estimate of θ using the squared error loss function. 15

4. (a) एक प्रसामान्य समष्टि के प्रसरण के लिए अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) व्युत्पन्न कीजिए, जबकि माध्य ज्ञात है।

Derive the sequential probability ratio test (SPRT) for variance of a normal population when mean is known. 20

(b) माना कि X का बंटन प्वासों है, जिसका प्राचल θ है। राव-ब्लैकवेल प्रमेय का प्रयोग करते हुए $\psi(\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^k}{k!}$, जहाँ k एक पूर्ण संख्या है, के लिए न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक प्राप्त कीजिए।

Let $X \sim$ Poisson (θ). Using Rao-Blackwell theorem, obtain a minimum variance unbiased estimator for $\psi(\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^k}{k!}$, where k is an integer. 15

(c) माना कि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक क्रम है, जहाँ $P(X_n = n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. क्या बंटन फलनों का क्रम $\{F_n\}$, बंटन फलन की ओर अभिसरित होता है?

Consider a sequence of random variables $\{X_n\}$, where $P(X_n = n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Does the sequence of distribution functions $\{F_n\}$ converge to a distribution function? 15

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) यदि $X_1 = Y_1 + Y_2$, $X_2 = Y_2 + Y_3$, $X_3 = Y_3 + Y_1$, जहाँ Y_1, Y_2 तथा Y_3 असहसम्बन्धी यादृच्छिक चर हैं तथा इनमें से प्रत्येक का माध्य शून्य एवं मानक विचलन एक हो, तो X_1 तथा X_2, X_3 में बहुसहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

If $X_1 = Y_1 + Y_2$, $X_2 = Y_2 + Y_3$, $X_3 = Y_3 + Y_1$, where Y_1, Y_2 and Y_3 are uncorrelated random variables and each of which has zero mean and unit standard deviation, find the multiple correlation coefficient between X_1 and X_2, X_3. 10

(b) यदि आकलनीय फलन $\lambda'\beta$ के दो आकल $l'y$ तथा $m'y$ हों तथा V_s (गुणांक मैट्रिक्स A का कॉलम स्पेस) पर l तथा m के प्रक्षेपण (projections) क्रमशः l_s तथा m_s हों, तो दर्शाइए कि $l_s = m_s$.

If $l'y$ and $m'y$ be two estimates of the estimable function $\lambda'\beta$, and l_s and m_s are the projections of l and m respectively on V_s (the column space of coefficient matrix A), then show that $l_s = m_s$. 10

(c) लाम्बिक अभिकल्पना की परिभाषा दीजिए। दर्शाइए कि यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना एक लाम्बिक अभिकल्पना है।

Define orthogonal design. Show that randomised block design is an orthogonal design. 10

(d) माना कि बिना लेबल के प्रेक्षण $y_1, y_2, \ldots, y_n$, SRSWOR (N, n) से प्राप्त हुए हैं। दर्शाइए कि प्रतिदर्श माध्य $\overline{y}$, समष्टि माध्य का सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक है।

In SRSWOR (N, n) resulting in unlabelled observations $y_1, y_2, \ldots, y_n$, show that the sample mean $\overline{y}$ is the best linear unbiased estimator of the population mean. 10

(e) एक द्विचर प्रसामान्य समष्टि BVN $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ से आमाप $n = 3$ के यादृच्छिक प्रतिदर्श का न्यास मैट्रिक्स निम्न है :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

10% सार्थकता-स्तर पर वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ के विरुद्ध निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ का परीक्षण कीजिए, जहाँ $\boldsymbol{\mu}_0' = (8, 5)$ है।

[आपको दिया हुआ है : $F_{0\cdot10;\,2,1} = 49\cdot5$, $F_{0\cdot10;\,1,\,2} = 8\cdot52632$]

The data matrix for a random sample of size $n = 3$ from a bivariate normal population BVN $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ is

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Test the null hypothesis $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ against $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, where $\boldsymbol{\mu}_0' = (8, 5)$, at 10% level of significance.

[You are given : $F_{0\cdot10;\,2,1} = 49\cdot5$, $F_{0\cdot10;\,1,\,2} = 8\cdot52632$] 10

6. (a) माना कि $U = \{1, 2, \ldots, N\}$ आमाप N की परिमित समष्टि है। माना कि $S_1 = \{1\}$, $S_j = \{j-1, j, j+1\}$, $j = 2, \ldots, N-1$ तथा $S_N = \{N\}$, प्रायिकताओं $P(S_j) \propto j$, $j = 1, 2, \ldots, N$ के प्रतिदर्श हैं। प्रथम एवं द्वितीय क्रम वाली अंतर्वेश प्रायिकताओं को ज्ञात कीजिए।

Let $U = \{1, 2, \ldots, N\}$ be the finite population of size N. Let $S_1 = \{1\}$, $S_j = \{j-1, j, j+1\}$, $j = 2, \ldots, N-1$ and $S_N = \{N\}$ be the samples with probabilities $P(S_j) \propto j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Find the first- and second-order inclusion probabilities. 20

(b) माना कि N, क्रम $b \times v$ की संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (BIBD) का एक आपतन मैट्रिक्स है। दर्शाइए कि $b \geq v$.

Let N be the incidence matrix of a BIBD of order $b \times v$. Show that $b \geq v$. 15

(c) माना कि चार यादृच्छिक चर Y_1, Y_2, Y_3 तथा Y_4 हैं, जिनके माध्य एवं प्रसरण निम्न हैं :

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \theta_1 + \theta_2, \quad E(Y_3) = E(Y_4) = \theta_1 + \theta_3 \quad \text{तथा} \quad V(Y_i) = \sigma^2, \; i = 1, 2, 3, 4$$

प्राचलिक फलन $\boldsymbol{l'\theta} = l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + l_3\theta_3$ की आकलनीयता का प्रतिबंध निकालिए।

Consider four random variables Y_1, Y_2, Y_3 and Y_4 with means and variances as follows :

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \theta_1 + \theta_2, \quad E(Y_3) = E(Y_4) = \theta_1 + \theta_3 \quad \text{and} \quad V(Y_i) = \sigma^2, \; i = 1, 2, 3, 4$$

Determine the condition of estimability of the parametric function

$$\boldsymbol{l'\theta} = l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + l_3\theta_3$$ 15

7. (a) यदि $\boldsymbol{X}$ का बंटन $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ तथा $\mathbf{C}$ एक m कोटि वाला $m \times p$ मैट्रिक्स हो, तो दर्शाइए कि

$$\boldsymbol{CX} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}')$$

If $\boldsymbol{X}$ follows $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ and $\mathbf{C}$ is an $m \times p$ matrix with rank m, then show that

$$\boldsymbol{CX} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}')$$ 20

(b) सिद्ध कीजिए कि एक अभिकल्पना के सम्बद्ध होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त $n \geq b + v - 1$ है, जहाँ n प्रेक्षणों की संख्या है।

Prove that the necessary and sufficient condition for a design to be connected is $n \geq b + v - 1$, n being the number of observations. 15

(c) माना कि $U = \{1, 2; 3, 4, 5, 6\}$ आमाप 6 की एक परिमित समष्टि है। माना कि अभिकल्पना का आधार $S_d = \{s_1 = (1, 2), s_2 = (3, 4, 5), s_3 = (1, 2, 6), s_4 = (3, 4, 6)\}$ है। माना

$$P(s_i) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$= 0, \quad \text{अन्यथा}$$

हॉर्विट्ज-थॉम्पसन आकल (HTE) निकालिए एवं अतः दर्शाइए कि HTE, समष्टि योग का एक अनभिनत आकलक है।

Let $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ be a finite population of size 6. Let $S_d = \{s_1 = (1, 2), s_2 = (3, 4, 5), s_3 = (1, 2, 6), s_4 = (3, 4, 6)\}$ be the support of the design. Let

$$P(s_i) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$= 0, \quad \text{otherwise}$$

Obtain the Horvitz-Thompson estimates (HTE) and hence show that HTE is an unbiased estimator of the population total. 15

8. *(a)* माना कि $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ का सहप्रसरण मैट्रिक्स निम्न है :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

इन मानों का उपयोग करते हुए प्रथम तीन मुख्य घटकों एवं प्रथम दो मुख्य घटकों द्वारा समझाए हुए विचरण के भाग को प्राप्त कीजिए।

Let $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ has the following covariance matrix :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtain the first three principal components using these values and the proportion of variations explained by the first two principal components. 20

(b) यदि X_1 तथा X_2 क्रमशः $(n_1 \times p)$ तथा $(n_2 \times p)$ कोटि के स्वतंत्र आँकड़ा मैट्रिक्स हों और यदि $X_i\,(i = 1, 2)$ की पंक्ति n_i का एकसमान एवं स्वतंत्र बंटन $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ हो, तो $\mu_1 = \mu_2$ एवं $\Sigma_1 = \Sigma_2$ के लिए दर्शाइए कि

$$\frac{n_1 n_2}{n} D^2 \simeq T^2(p, n-2) \text{ चर, जहाँ } n = n_1 + n_2$$

D^2 प्रतिदर्श महालानोबीस दूरी प्रतिदर्शज है।

If X_1 and X_2 be independent data matrices of order $(n_1 \times p)$ and $(n_2 \times p)$ respectively and if the n_i rows of $X_i\,(i = 1, 2)$ be identically and independcntly distributed as $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$, then for $\mu_1 = \mu_2$ and $\Sigma_1 = \Sigma_2$, show that

$$\frac{n_1 n_2}{n} D^2 \simeq T^2(p, n-2) \text{ variable, where } n = n_1 + n_2$$

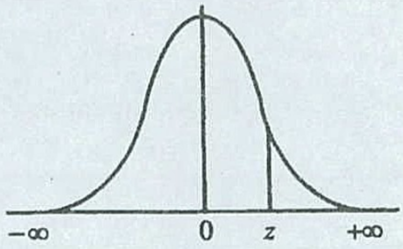
D^2 denotes sample Mahalanobis distance statistic. 15

(c) किसी मुख्य प्रभाव तथा 2-घटक अन्योन्यक्रिया प्रभाव के बिना संकरण के, 3-घटक तथा 4-घटक अन्योन्यक्रिया प्रभावों पर संतुलन प्राप्त करते हुए प्रतिकृति की न्यूनतम संख्या वाली $(2^5, 2^2)$ अभिकल्पना का सृजन कीजिए।

Construct $(2^5, 2^2)$ design with minimum number of replicates achieving balance over 3-factor and 4-factor interaction effects without confounding any main effect and 2-factor interaction effect. 15

★★★

प्रसामान्य बंटन सारणी / Normal Distribution Table



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998