CHAHAL ACADEMY
LEARN TODAY! LEAD TOMORROW!
96259-93995

सांख्यिकी / STATISTICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time Allowed : ***Three Hours***

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : ***250***

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

There are ***EIGHT*** *questions divided in* ***TWO SECTIONS*** *and printed both in* ***HINDI*** *and in* ***ENGLISH.***

Candidate has to attempt ***FIVE*** *questions in all.*

Questions no. ***1*** *and* ***5*** *are compulsory and out of the remaining, any* ***THREE*** *are to be attempted choosing at least* ***ONE*** *question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) एक बीमाकर्ता एक बड़ी कम्पनी के कर्मचारियों को एक स्वास्थ्य योजना का प्रस्ताव देता है । इस योजना के तहत, व्यक्तिगत रूप में कोई भी कर्मचारी पूरक बीमा व्याप्ति A, B तथा C में से यथार्थतः किन्हीं दो का अथवा किसी का भी नहीं चयन कर सकता है । कम्पनी के कर्मचारियों द्वारा A, B तथा C बीमा व्याप्ति को चुनने के अनुपात क्रमशः $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{7}{12}$ हैं । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यादृच्छिक चुना गया कर्मचारी किसी भी पूरक बीमा व्याप्ति का चयन नहीं करेगा ।

An insurer offers a health plan to the employees of a large company. As part of this plan, individually any employee may choose exactly two or none of the supplementary coverages A, B and C. The proportions of the company employees that choose coverage A, B and C are $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ and $\frac{7}{12}$ respectively. Determine the probability that a randomly chosen employee will choose no supplementary coverage. *10*

(b) माना X और Y सर्वसम स्वतंत्र वितरित (iid) यादृच्छिक चर हैं, जहाँ

$P(X = k) = 2^{-k}$, k = 1, 2, 3, ...

$P(X > Y)$ ज्ञात कीजिए ।

Let X and Y be iid random variables with $P(X = k) = 2^{-k}$, k = 1, 2, 3, ... Find $P(X > Y)$. *10*

(c) एक गुणोत्तर बंटन $p(x) = 2^{-x}$; x = 1, 2, 3, ..., के लिए दर्शाइए कि शेबेशेव असमिका $P(|X-2| \leq 2) > \frac{1}{2}$ देती है, जबकि वास्तविक प्रायिकता $\frac{15}{16}$ है ।

For a geometric distribution $p(x) = 2^{-x}$; x = 1, 2, 3, ..., show that Chebyshev's inequality gives $P(|X-2| \leq 2) > \frac{1}{2}$, while the actual probability is $\frac{15}{16}$. *10*

(d) एक पॉलिसी समूह, घाटे के लिए निम्नलिखित बंटन फलन का अनुपालन करता है :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta}{x}, \quad \theta < x < \infty.$$

20 घाटों के एक प्रतिदर्श के परिणाम निम्नलिखित रूप में प्राप्त हुए :

अन्तराल	घाटों की संख्या
$x \leq 10$	9
$10 < x \leq 25$	6
$x > 25$	5

(i) θ का अधिकतम संभाविता आकलक (MLE) प्राप्त कीजिए ।

(ii) θ के अधिकतम संभाविता आकलक (MLE) का प्रयोग करके क्रेमर-राव निम्न परिबंध (CRLB) ज्ञात कीजिए ।

(iii) क्रेमर-राव निम्न परिबंध (CRLB) तथा अधिकतम संभाविता आकलक (MLE) के अनन्तस्पर्शी बंटन का प्रयोग करके θ का 95% विश्वास्यता-अन्तराल प्राप्त कीजिए ।

For a group of policies, losses follow the distribution function

$$F(x) = 1 - \frac{\theta}{x}, \ \theta < x < \infty.$$

A sample of 20 losses resulted in the following :

Interval	Number of losses
$x \leq 10$	9
$10 < x \leq 25$	6
$x > 25$	5

(i) Obtain maximum likelihood estimator (MLE) of θ. *4*

(ii) Find Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) using MLE of θ. *4*

(iii) Using CRLB and asymptotic distribution of MLE, obtain 95% confidence interval for θ. *2*

(e) माना X_1 और X_2 दो सर्वसम स्वतंत्र बंटन वाले (iid) प्रसामान्य बंटन $N(\theta, 1)$ के यादृच्छिक चर हैं । इसके अतिरिक्त मान लीजिए बर्नूली यादृच्छिक चर V है, जहाँ $P(V = 1) = \frac{1}{4}$ तथा जो X_1 एवं X_2 से स्वतंत्र है । X_3 को इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि

$$X_3 = \begin{cases} X_1, & \text{यदि} \quad V = 0 \\ X_2, & \text{यदि} \quad V = 1 \end{cases}$$

परिकल्पना $H_0 : \theta = 0$ का परीक्षण $H_1 : \theta = 1$ के विरुद्ध करने के लिए निम्नलिखित परीक्षण पर विचार कीजिए :

$$H_0 \text{ को निरस्त कीजिए यदि } \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} > C$$

C का मान ज्ञात कीजिए, जिससे परीक्षण आकार 0·05 हो जाता है । परीक्षण की क्षमता की भी गणना कीजिए ।

[दिया गया है : $P(Z > 1{\cdot}64) = 0{\cdot}05$, $P(|Z| > 1{\cdot}96) = 0{\cdot}05$, $P(Z > 0{\cdot}30) = 0{\cdot}03821$]

Let X_1 and X_2 be two iid random variables with normal $N(\theta, 1)$ distribution. Further, consider Bernoulli random variable V with $P(V = 1) = \frac{1}{4}$ and which is independent of X_1 and X_2. Define X_3 as

$$X_3 = \begin{cases} X_1, & \text{if} \quad V = 0 \\ X_2, & \text{if} \quad V = 1 \end{cases}$$

For testing the hypothesis $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$, consider the test

$$\text{Reject } H_0 \text{ if } \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} > C$$

Find C such that the test size becomes 0·05. Also compute power of the test.

[Given that : $P(Z > 1{\cdot}64) = 0{\cdot}05$, $P(|Z| > 1{\cdot}96) = 0{\cdot}05$,
$P(Z > 0{\cdot}30) = 0{\cdot}03821$] *10*

Q2. (a) एक विशिष्ट कम्पनी द्वारा बनाए गए प्रत्येक बल्ब का घण्टों में जीवन-काल, θ माध्य के एक स्वतंत्र चरघातांकी बंटन का अनुकरण करता है । परिकल्पना $H_0 : \theta = 2000$ का $H_1 : \theta = 1000$ के विरुद्ध परीक्षण के लिए एक प्रयोगकर्ता 50 बल्बों, जिनमें प्रत्येक 10 पृथक् स्थानों में 5 बल्ब हैं, के जीवन-काल पर प्रयोग करता है ।

त्वरित प्रारम्भिक परिणाम प्राप्ति के लिए, प्रयोगकर्ता प्रयोग को तुरन्त रोक देने का निर्णय लेता है, जैसे ही प्रत्येक स्थान पर एक बल्ब निष्क्रिय (फेल) हो जाता है । माना Y_i, iवे (i = 1, 2, ..., 10) स्थान पर निष्क्रिय (फेल) होने वाले पहले बल्ब के जीवन-काल का द्योतक है । H_0 का H_1 के विरुद्ध परीक्षण हेतु, उपलब्ध जीवन-कालों पर आधारित, 0·05 आकार के सबसे प्रभावशाली परीक्षण को प्राप्त कीजिए । यदि उपलब्ध आँकड़े हैं :

510, 9752, 5650, 12385, 230, 4225, 860, 300, 3000 एवं 1500

अपना निष्कर्ष दीजिए ।

[दिया गया है कि : $P(\chi^2_{(20)} < 10{\cdot}851) = 0{\cdot}05$]

The lifetime in hours of each bulb manufactured by a particular company follows an independent exponential distribution with mean θ. To test the hypothesis $H_0 : \theta = 2000$ versus $H_1 : \theta = 1000$, an experimenter sets up an experiment with 50 bulbs with 5 bulbs in each of 10 different locations to examine their lifetimes.

To get quick preliminary results, the experimenter decides to stop the experiment as soon as one bulb fails at each location. Let Y_i denote the lifetime of the first bulb to fail at location i, i = 1, 2, ..., 10. Obtain the most powerful test of size 0·05 to test H_0 versus H_1 based on the available lifetimes. If the available data is

510, 9752, 5650, 12385, 230, 4225, 860, 300, 3000 and 1500,

give your conclusion. *20*

[Given that : $P(\chi^2_{(20)} < 10{\cdot}851) = 0{\cdot}05$]

(b) यादृच्छिक चर X, मान अन्तराल [0, 2] पर लेता है । दिया गया है कि $P(X = 1) = 0{\cdot}25,\ F(x \mid x < 1) = x^2,\ F(x \mid x > 1) = x - 1,\ E(X) = 1.$

$P(X \leq 1)$ ज्ञात कीजिए ।

The random variable X takes values on the interval [0, 2]. Given that $P(X = 1) = 0{\cdot}25,\ F(x \mid x < 1) = x^2,\ F(x \mid x > 1) = x - 1,\ E(X) = 1.$

Find $P(X \leq 1)$. *15*

(c) माना $\theta > 0$ एक अज्ञात प्राचल है और $X_1, X_2, ..., X_n$ एक बंटन से कोई यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसका प्रायिकता बंटन फलन (pdf),

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

θ का अधिकतम संभाविता आकलक (MLE) तथा इसका त्रुटि वर्ग माध्य (MSE) ज्ञात कीजिए ।

Let $\theta > 0$ be the unknown parameter and $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample from the distribution with the probability distribution function (pdf)

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find maximum likelihood estimator (MLE) of θ and its mean squared error (MSE). *15*

Q3. (a) माना कि $X_1, X_2, ..., X_n$ एकसमान बंटन $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ से यादृच्छिक प्रतिदर्श है । दर्शाइए कि $Y = (X_{(1)}, X_{(n)})$, θ के लिए एक पर्याप्त प्रतिदर्शज है परन्तु यह पूर्ण नहीं है, जहाँ पर

$X_{(1)} =$ न्यूनतम $(X_1, X_2, ..., X_n)$

$X_{(n)} =$ अधिकतम $(X_1, X_2, ..., X_n)$

Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample from uniform distribution $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$. Show that $Y = (X_{(1)}, X_{(n)})$ is sufficient statistic for θ but not complete, where

$X_{(1)} = \min. (X_1, X_2, ..., X_n)$

$X_{(n)} = \max. (X_1, X_2, ..., X_n)$ *20*

(b) माना X ~ एकसमान U(0, 2θ), θ > 0 बंटन है । Y = अधिकतम (X, 2θ – X) को परिभाषित कीजिए । E(Y) ज्ञात कीजिए ।

Let $X \sim$ uniform $U(0, 2\theta), \theta > 0$ distribution.

Define $Y = \max(X, 2\theta - X)$. Find $E(Y)$. *15*

(c) अभिलक्षण-फलन पर प्रतिलोमन प्रमेय को व्यक्त कीजिए । अतैव, अभिलक्षण-फलन

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

के अनुरूप घनत्व फलन ज्ञात कीजिए ।

State inversion theorem on characteristic function. Hence, find the density function corresponding to the characteristic function

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$ *15*

Q4. (a) बंटन

$$P(X = -1) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3},$$

द्वारा दी गई परिकल्पना H_0, जो बंटन

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}, \; P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

द्वारा दी गई वैकल्पिक परिकल्पना H_1 के विरुद्ध हो, का अनुक्रमत: परीक्षण करने के लिए यह निर्णय लिया गया कि प्रतिचयन लगातार तब तक किया जाए जब तक कि

$$-\left(\frac{n+1}{2}\right) < S_n < \left(\frac{n+2}{2}\right)$$

जहाँ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, एवं X_i's क्रमागत अवलोकन हैं ।

H_0 तथा H_1 के अन्तर्गत प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रक्रिया 2वें (दूसरे) अवलोकन या इससे पूर्व निरस्त हो जाएगी ।

To test sequentially the hypothesis H_0 for which the distribution is given by

$$P(X = -1) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$$

against the alternative H_1 that is given by

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4},\ P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

it is decided to continue sampling as long as

$$-\left(\frac{n+1}{2}\right) < S_n < \left(\frac{n+2}{2}\right)$$

where $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, and X_i's are successive observations.

Compute the probability under H_0 and H_1 that the procedure will terminate with the 2^{nd} observation or earlier. *20*

(b) (i) एकसमान बंटन U(0, 1) का अभिलक्षण-फलन प्राप्त कीजिए ।

Obtain characteristic function of uniform distribution U(0, 1). *5*

(ii) माना $\{X_n\}$ स्वतंत्र यादृच्छिक चरों का इस प्रकार का अनुक्रम है कि

$$P(X_k = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n$$

दिखाइए कि X_n, नियम की दृष्टि से एकसमान बंटन को अभिसरित होता है । आपके द्वारा उपयोग में लाए गए परिणाम का उल्लेख कीजिए ।

Let $\{X_n\}$ be a sequence of independent random variables such that

$$P(X_k = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n$$

Show that X_n converges in law to a uniform distribution. State the result you have used. *10*

(c) एक ग्रामीण जूनियर हाई स्कूल से 14 पुल्लिंग छात्रों का एक यादृच्छिक नमूना तथा एक शहरी जूनियर हाई स्कूल से 16 पुल्लिंग छात्रों का एक स्वतंत्र यादृच्छिक नमूना लेकर उनके मानसिक स्वास्थ्य के स्तर को मापने के लिए एक परीक्षण किया गया । प्राप्त आँकड़े निम्नलिखित तालिका में दिए गए हैं :

जूनियर हाई स्कूलों के पुल्लिंग छात्रों के मानसिक स्वास्थ्य समंकों के आँकड़े :

ग्रामीण : 28, 49, 42, 30, 33, 36, 49, 31, 41, 46, 41, 21, 20, 28

शहरी : 37, 22, 24, 24, 27, 44, 34, 26, 20, 26, 25, 45, 32, 40, 45, 25

माध्यिका परीक्षण का प्रयोग करते हुए 5% सार्थकता स्तर पर परिकल्पना की जाँच कीजिए कि उनके मानसिक स्वास्थ्य स्तर समंकों की माध्यिका समान है अथवा नहीं ?

[दिया गया है कि $\chi^2_{(1, 0\cdot05)} = 3\cdot841$]

A random sample of 14 male students from a rural Junior High School and an independent random sample of 16 male students from an urban Junior High School were given a test to measure their level of mental health. The obtained data are given in the following table :

Mental Health Scores of Junior High Schools' male students :

Rural : 28, 49, 42, 30, 33, 36, 49, 31, 41, 46, 41, 21, 20, 28

Urban : 37, 22, 24, 24, 27, 44, 34, 26, 20, 26, 25, 45, 32, 40, 45, 25

Apply Median Test to test the hypothesis at 5% level of significance that their median mental health level scores are equal or not. *15*

[Given that $\chi^2_{(1, 0\cdot05)} = 3\cdot841$]

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) एक विद्यार्थी दिए गए दत्तों के लिए निम्नलिखित रैखिक समाश्रयण निदर्श प्रयुक्त करता है :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

u_i's सर्वसम स्वतंत्र वितरित (iid) प्रसामान्य मूल्य $(N(0, \sigma^2))$ हैं, जहाँ σ^2 अज्ञात है । निम्नलिखित सूचना उपलब्ध है :

$$n = 7, \ \ \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = 280000, \ \ \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16500$$

β के लिए 95% विश्वास्यता-अन्तराल : (0·030, 0·088) है ।

गणना कीजिए, निदर्श (मॉडल) द्वारा प्रतिक्रियाओं की कुल परिवर्तनशीलता के किस अनुपात को समझाया गया है । दिया गया है कि $t_{0\cdot025,\,5} = 2\cdot57$.

A student fits the following linear regression model to a given data :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

u_i's are iid normal values $(N(0, \sigma^2))$, where σ^2 is unknown.

The following information is available :

$$n = 7, \ \ \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = 280000, \ \ \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16500$$

95% confidence interval for β is : (0·030, 0·088).

Calculate what proportion of the total variability of the responses is explained by the model. Given that $t_{0\cdot025,\,5} = 2\cdot57$. *10*

(b) माना $X \sim N_2(\mu, \Sigma)$ प्रायिकता बंटन फलन (pdf)

$f(x) = C\, e^{-Q/2}$ के साथ है,

जहाँ $Q = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 32x + 4y + 92$.

μ तथा Σ प्राप्त कीजिए ।

Let $X \sim N_2(\mu, \Sigma)$ with probability distribution function (pdf),

$$f(x) = C\, e^{-Q/2},$$

where $Q = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 32x + 4y + 92$.

Obtain μ and Σ. *10*

(c) एक 6 इकाइयों वाली समष्टि के सन्निहित मान 6, 3, 1, 4, 2 तथा 5 हैं । आकार 2 के प्रतिस्थापना के बिना सभी संभावित प्रतिदर्शों को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए कि

$$V(\bar{y}) = \frac{N - n}{N.n} S^2 .$$

A population consists of 6 units with values 6, 3, 1, 4, 2 and 5. Write down all possible samples of size 2 without replacement and verify that

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N.n} S^2 .$$ 10

(d) गाउस-मार्कोव रैखिक निदर्श (मॉडल) को परिभाषित कीजिए । प्राचलों के रैखिक फलन $l'\beta$ के रैखिकत: आकलित हो सकने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

Define Gauss-Markov linear model. State and prove necessary and sufficient condition for the linear function $l'\beta$ of the parameters to be linearly estimable. 10

(e) BIBD का वर्णन कीजिए तथा दिखाइए कि $b \geq v$, जहाँ प्रतीकों का सामान्य अर्थों में प्रयोग किया गया है ।

Describe BIBD and show that $b \geq v$, where symbols have usual meanings. 10

Q6. (a) क्रमबद्ध प्रतिचयन क्या है ? सामान्य संकेतों में, सिद्ध कीजिए कि

$$V(\bar{y}_{sys}) = \frac{nk-1}{nk} \cdot \frac{S^2}{n} \{1 + (n-1)\rho\},$$

जहाँ ρ एक ही क्रमबद्ध प्रतिचयनों की इकाइयों के मध्य अंतरावर्ग सहसम्बन्ध गुणांक है । अतैव, $V(\bar{y}_{sys})$ ऋणेतर होने के लिए ρ का न्यूनतम मान निर्धारित कीजिए ।

What is systematic sampling ? In usual notation, prove that

$$V(\bar{y}_{sys}) = \frac{nk-1}{nk} \cdot \frac{S^2}{n} \{1 + (n-1)\rho\},$$

where ρ is the intra-class correlation coefficient between the units of the same systematic samples. Hence, determine the minimum value of ρ for $V(\bar{y}_{sys})$ to be non-negative. 20

(b) माना Y_1, Y_2, Y_3 असहसंबंधित चर, सामान्य प्रसरण σ^2 के साथ इस प्रकार हैं कि

$$E(Y_1) = \beta_1 + \beta_2$$

$$E(Y_2) = 2\beta_1$$

$$E(Y_3) = \beta_1 - \beta_2$$

अवशिष्ट माध्य वर्ग की गणना कीजिए ।

Let Y_1, Y_2, Y_3 be uncorrelated variables with common variance σ^2 such that

$$E(Y_1) = \beta_1 + \beta_2$$
$$E(Y_2) = 2\beta_1$$
$$E(Y_3) = \beta_1 - \beta_2$$

Compute residual mean square. *10*

(c) माना $n = 4,\ p = 2,\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, जहाँ

X_1 : भार (किग्रा में), X_2 : ऊँचाई (सेमी में) शिशु के हैं ।

प्रतिदर्श आँकड़ा आव्यूह

$$X = \begin{bmatrix} 3{\cdot}0 & 4{\cdot}0 & 3{\cdot}0 & 3{\cdot}0 \\ 40 & 40 & 30 & 35 \end{bmatrix}$$

5% सार्थकता स्तर पर शून्य परिकल्पना $H_0 : \mu = \mu_0 = \begin{pmatrix} 3{\cdot}0 \\ 35{\cdot}0 \end{pmatrix}$ का परीक्षण कीजिए ।

[दिया गया है कि : $F_{((2,2),\ 0{\cdot}05)} = 19{\cdot}00$]

Let $n = 4,\ p = 2,\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, where

X_1 : weight (in kg), X_2 : height (in cm) of infant.

Sample data matrix

$$X = \begin{bmatrix} 3{\cdot}0 & 4{\cdot}0 & 3{\cdot}0 & 3{\cdot}0 \\ 40 & 40 & 30 & 35 \end{bmatrix}$$

Test at 5% level of significance the null hypothesis $H_0 : \mu = \mu_0 = \begin{pmatrix} 3{\cdot}0 \\ 35{\cdot}0 \end{pmatrix}$. *20*

[Given that : $F_{((2,2),\ 0{\cdot}05)} = 19{\cdot}00$]

Q7. (a) होटलिंग-T^2 को परिभाषित कीजिए । दर्शाइए कि T^2 प्रतिदर्शज संभाविता अनुपात कसौटी का एक फलन है ।

Define Hotelling's-T^2. Show that T^2 statistic is a function of likelihood ratio criteria. *20*

(b) माना 'y' तथा 'x' की कुल जनसंख्याओं का अनुपात R है तथा R का आकलन $\hat{R}$ है । $V(\hat{R})$ प्राप्त कीजिए । आकलन $\hat{V}(\hat{R})$ भी ज्ञात कीजिए ।

Let R be the ratio of population totals of 'y' and 'x' and $\hat{R}$ is the estimate of R. Obtain $V(\hat{R})$. Also find the estimate $\hat{V}(\hat{R})$. *15*

(c) आंशिक संकरण से आप क्या समझते हैं ? एक 2^3-बहु-उपादानी अभिकल्पना का वर्णन कीजिए जो 4 प्रतिकृतियों के साथ 2 खण्डों में व्यवस्थित हो, जहाँ ABC, BC, AC तथा AB संकरणित हैं । ऐसी अभिकल्पना (डिज़ाइन) की ANOVA तालिका भी तैयार कीजिए ।

What do you mean by Partial Confounding ? Describe a 2^3-factorial design arranged in 2 blocks with 4 replications, where ABC, BC, AC and AB are confounded. Also prepare ANOVA table for such design. *15*

Q8. (a) सरल जालक अभिकल्प (डिज़ाइन) की चर्चा कीजिए । माना $\beta_{1\bullet}, \ldots, \beta_{p\bullet}$ पंक्ति उपाव्यूह प्रभावों के द्योतक हैं तथा $\beta_{\bullet 1}, \ldots, \beta_{\bullet p}$ स्तम्भ उपाव्यूह प्रभावों के द्योतक हैं और ζ_{ij} (i, j)वें उपचार के प्रभाव को संकेतित किया है, जहाँ उपचारों की संख्या $t = p^2$ है । ANOVA तालिका का उपयोग करके आप निम्न परिकल्पना

$$H_0 : \zeta_{11} = \zeta_{12} = \ldots = \zeta_{pp} = \tau$$

का परीक्षण कैसे करेंगे ?

Discuss Simple Lattice Design. Let $\beta_{1\bullet}, \ldots, \beta_{p\bullet}$ denote row block effects and $\beta_{\bullet 1}, \ldots, \beta_{\bullet p}$ denote column block effects and ζ_{ij} denote the effect of $(i, j)^{th}$ treatment, where number of treatments $t = p^2$. How do you test the hypothesis

$$H_0 : \zeta_{11} = \zeta_{12} = \ldots = \zeta_{pp} = \tau$$

using ANOVA table ? *20*

(b) दिखाइए कि प्रतिस्थापन के साथ, pps प्रतिचयन में समष्टि माध्य $\bar{Y}$ का एक अनभिनत आकलक है

$$\bar{y}_{pps} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{Np_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{Z},$$

प्रसरण $V(\bar{y}_{pps}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{y_i}{Np_i} - \bar{Y} \right)^2$ के साथ

जहाँ $p_i = \frac{X_i}{X}$ प्रायिकता है कि iवीं इकाई का चयन प्रतिदर्श में इस प्रकार हुआ है कि $\sum p_i = 1, \; Z_i = \frac{y_i}{Np_i}$.

Show that in pps sampling, with replacement, an unbiased estimator of the population mean $\bar{Y}$ is

$$\bar{y}_{pps} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{Np_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{Z}, \text{ with variance}$$

$$V(\bar{y}_{pps}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{y_i}{Np_i} - \bar{Y} \right)^2$$

where $p_i = \frac{X_i}{X}$ be the probability that the i^{th} unit is selected in a sample, such that $\sum p_i = 1$, $Z_i = \frac{y_i}{Np_i}$. 15

(c) एम.बी.ए. पाठ्यक्रम में प्रवेश हेतु दो प्रकार की परीक्षाएँ ली जाती हैं जैसे : लिखित एवं मौखिक । विद्यार्थियों द्वारा दी गई परीक्षा के परिणाम इस प्रकार हैं :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{लिखित परीक्षा में प्राप्तांक} \\ \text{मौखिक परीक्षा में प्राप्तांक} \end{pmatrix}$$

माना

π_1 : एम.बी.ए. पाठ्यक्रम में प्रवेश हेतु पात्र विद्यार्थी

π_2 : एम.बी.ए. पाठ्यक्रम में प्रवेश हेतु अपात्र विद्यार्थी

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 30\cdot6 \\ 14\cdot4 \end{pmatrix}, \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 5\cdot60 & -0\cdot62 \\ -0\cdot62 & 2\cdot08 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 24\cdot8 \\ 11\cdot2 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 5\cdot60 & -0\cdot62 \\ -0\cdot62 & 2\cdot08 \end{pmatrix}$$

यदि एक विद्यार्थी लिखित परीक्षा में 29·0 अंक तथा मौखिक परीक्षा में 12·0 अंक प्राप्त करता है, फिशर के रैखिक विविक्तकर फलन के आधार पर वर्गीकरण कीजिए कि उक्त विद्यार्थी प्रवेश के लिए पात्र है अथवा नहीं । साथ ही ग़लत वर्गीकरण करने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए ।

[दिया गया है $P(0 < Z < 1\cdot8277) = 0\cdot4664$]

Two types of tests viz : written and oral were conducted for seeking admission to MBA course. The result of the test given by the students are as follows :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{marks obtained in written test} \\ \text{marks obtained in oral test} \end{pmatrix}$$

Let

π_1 : students eligible for admission to MBA course

π_2 : students not eligible for admission to MBA course

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 30{\cdot}6 \\ 14{\cdot}4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 5{\cdot}60 & -0{\cdot}62 \\ -0{\cdot}62 & 2{\cdot}08 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 24{\cdot}8 \\ 11{\cdot}2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 5{\cdot}60 & -0{\cdot}62 \\ -0{\cdot}62 & 2{\cdot}08 \end{pmatrix}$$

If one student gets 29·0 marks in written test and 12·0 in oral test, classify the student as eligible or not based on Fisher's linear discriminant function. Also find the probability of misclassification. *15*

[Given that $P(0 < Z < 1{\cdot}8277) = 0{\cdot}4664$]