CHAHAL ACADEMY
LEARN TODAY! LEAD TOMORROW!
96259-93995

सांख्यिकी / STATISTICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : **तीन** घंटे	अधिकतम अंक : **250**
*Time Allowed : **Three** Hours*	*Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) मान लीजिए कि X और Y स्वतंत्र एवं चरघातांकी बंटित यादृच्छिक चर हैं जिनके माध्य क्रमशः $\frac{1}{\lambda_1}$ और $\frac{1}{\lambda_2}$ हैं, जहाँ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ है । E [max (X, Y)] ज्ञात कीजिए ।

Let X and Y be independent random variables with exponential distribution having respective means $\frac{1}{\lambda_1}$ and $\frac{1}{\lambda_2}$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Find E [max (X, Y)]. *10*

(b) केन्द्रीय सीमा प्रमेय का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Using Central Limit Theorem, show that

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$ *10*

(c) छः फलकों वाले एक निष्पक्ष पाँसे को दो बार फेंका जाता है । मान लीजिए कि प्राप्त समंकों में छोटे समंक को X से निर्दिष्ट किया जाता है । तब दर्शाइए कि X का प्रायिकता द्रव्यमान फलन (पी.एम.एफ.) इस प्रकार दिया जाता है :

$$p_X(x) = \frac{13 - 2x}{36}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6$$
$$= 0, \quad \text{अन्यथा ।}$$

An unbiased six-sided die is thrown twice. Let X denote the smaller of the scores obtained. Then show that the probability mass function (p.m.f.) of X is given by :

$$p_X(x) = \frac{13 - 2x}{36}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6$$
$$= 0, \quad \text{otherwise.}$$ *10*

(d) मान लीजिए θ के लिए T_1 और T_2 दो अनभिनत आकलक हैं जिनके प्रसरण $Var(T_1) = Var(T_2)$ हैं, तब दर्शाइए कि

$$Corr(T_1, T_2) \geq 2e - 1,$$

जहाँ e प्रत्येक आकलक की दक्षता है ।

Let T_1 and T_2 be two unbiased estimators of θ with $Var(T_1) = Var(T_2)$, then show that

$$Corr(T_1, T_2) \geq 2e - 1,$$

where e is the efficiency of each estimator. *10*

(e) एक कलश में 5 मार्बल हैं जिनमें से θ सफेद हैं और बाकी काले हैं । निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \theta = 3$ का वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \theta = 4$ के विरुद्ध परीक्षण करने के लिए दो मार्बल यादृच्छया लिए गए हैं । यदि दोनों मार्बल सफेद आते हैं तो H_0 को अस्वीकार किया जाता है, अन्यथा H_0 को स्वीकार किया जाता है ।

दर्शाइए कि प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता प्रतिस्थापन रहित तथा प्रतिस्थापन सहित दोनों योजनाओं में 0·40 से कम है, लेकिन परीक्षण की क्षमता प्रतिस्थापन सहित योजना में प्रतिस्थापन रहित योजना से अधिक है ।

An urn contains 5 marbles of which θ are white and the others black. In order to test null hypothesis $H_0 : \theta = 3$ versus alternative hypothesis $H_1 : \theta = 4$, two marbles are drawn at random. H_0 is rejected if both the marbles are white, otherwise H_0 is accepted.

Show that probability of type I error in case of without replacement and with replacement schemes, both are less than 0·40, but power of the test under with replacement is higher than that of under without replacement scheme. *10*

Q2. (a) मान लीजिए कि एक यादृच्छिक चर X का बंटन चरघातांकी है जिसका माध्य $\frac{1}{\theta}, \theta > 0$ है । $H_0 : \theta = 3$ का $H_1 : \theta = 2$ के विरुद्ध परीक्षण करने के लिए अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण की रचना कीजिए । यदि निराकरणीय परिकल्पना सत्य है, तो दर्शाइए कि प्रथम चरण में परीक्षण निरस्त होने की प्रायिकता $1 - \frac{8}{27}\left(\frac{A-B}{AB}\right)$ है, जहाँ B और A, B < A, समाप्ति सीमाएँ हैं ।

Let a random variable X have exponential distribution with mean $\frac{1}{\theta}, \theta > 0$. To test $H_0 : \theta = 3$ against $H_1 : \theta = 2$, construct sequential probability ratio test. Show that probability of terminating the test at the first stage when null hypothesis is true is $1 - \frac{8}{27}\left(\frac{A-B}{AB}\right)$, where B and A, B < A, are stopping bounds. *20*

(b) प्रत्येक रविवार को एक मछुआरा अपने घर के पास तीन संभावित स्थानों में से किसी एक स्थान पर जाता है : वह प्रायिकता $\frac{1}{2}$ के साथ समुद्र को, प्रायिकता $\frac{1}{4}$ के साथ एक नदी को, या प्रायिकता $\frac{1}{4}$ के साथ एक सरोवर को जाता है । यदि वह समुद्र को जाता है, तो उसके मछली पकड़ने का संयोग 80% है; अनुरूपी संख्याएँ नदी और सरोवर के लिए क्रमश: 40% और 60% हैं ।

(i) दिए गए एक रविवार के दिन वह मछली पकड़े, इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि किसी दिए गए रविवार के दिन वह बिना मछली पकड़े घर वापस आता है, तो वह जहाँ से वापस आया, उस अधिकतम संभावित स्थान का निर्धारण कीजिए ।

Each Sunday a fisherman visits one of three possible locations near his home : he goes to the sea with probability $\frac{1}{2}$, to a river with probability $\frac{1}{4}$, or to a lake with probability $\frac{1}{4}$. If he goes to the sea there is an 80% chance that he will catch fish; corresponding figures for the river and the lake are 40% and 60% respectively.

(i) Find the probability that, on a given Sunday, he catches fish.

(ii) If, on a particular Sunday, he comes home without catching anything, determine the most likely place that he has been to.

5+10=15

(c) मान लीजिए कि एकसमान समष्टि जिसका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta}, \ 0 < x < \theta$$

है, से $X_1 < X_2 < X_3$ क्रम प्रतिदर्शज लिए गए हैं । दर्शाइए कि $4X_1$, θ का एक अनभिनत आकलक है ।

Let $X_1 < X_2 < X_3$ be the order statistics from uniform population having probability density function

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta}, \ 0 < x < \theta.$$

Show that $4X_1$ is an unbiased estimator of θ. *15*

Q3. (a) (i) एक प्रतिदर्श कितना बड़ा लेना चाहिए ताकि इस बात की प्रायिकता कम-से-कम 0·90 होगी कि प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य के 0·4 – सामीप्य के दायरे में होगा, बशर्ते कि समष्टि मानक विचलन 2 है ?

(ii) परीक्षण कीजिए कि क्या बृहत् संख्याओं का दुर्बल नियम निम्न परिभाषित स्वतंत्र यादृच्छिक चरों के अनुक्रम $\{X_k\}$ के लिए लागू होता है :

$$P(X_k = -1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\right\},$$

$$P(X_k = 1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\right\}.$$

(i) How large a sample must be taken in order that the probability will be at least 0·90 that the sample mean will be within 0·4 – neighbourhood of the population mean, provided the population standard deviation is 2 ?

(ii) Examine whether the weak law of large numbers holds for the sequence $\{X_k\}$ of independent random variables defined as follows : *8+7=15*

$$P(X_k = -1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\right\},$$

$$P(X_k = 1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\right\}.$$

(b) एक बहुपद बंटन में चार कोष्ठकों की सैद्धांतिक प्रायिकताएँ $\frac{2+\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$ और $\frac{\theta}{4}$ हैं, जबकि प्रेक्षित बारम्बारताएँ क्रमश: 108, 27, 30 और 8 हैं, तब θ का आकलन अधिकतम सम्भाविता विधि से कीजिए । आकल की मानक त्रुटि भी निकालिए ।

Theoretical probabilities in the four cells of a multinomial distribution are $\frac{2+\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{4}$ and $\frac{\theta}{4}$, whereas the observed frequencies are 108, 27, 30 and 8 respectively, then estimate θ by maximum likelihood method. Also, obtain the standard error of the estimate. *20*

(c) यदि X एक यादृच्छिक चर है जिसका अभिलक्षण फलन

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

है, तब संगत प्रायिकता घनत्व फलन को प्राप्त कीजिए ।

If X is a random variable with characteristic function

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

then obtain the corresponding probability density function. *15*

Q4. (a) प्वासों बंटन

$$P_\theta(X = j) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^j}{j\,!} = p_j,\ j = 0, 1, 2, ...$$

पर विचार कीजिए । मान लीजिए कि $X = j$ की बारम्बारता f_j है तथा $E(f_j) = m_j = np_j$ है । आप θ का न्यूनतम काई-वर्ग आकल कैसे प्राप्त करेंगे, इसकी विवेचना कीजिए । यदि पर्याप्त प्रतिदर्शज का अस्तित्व भी है तो क्या न्यूनतम काई-वर्ग विधि पर्याप्त प्रतिदर्शज अवश्य देगा ?

Consider Poisson distribution

$$P_\theta(X = j) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^j}{j\,!} = p_j,\ j = 0, 1, 2, ...$$

Let f_j be the frequency for $X = j$ and $E(f_j) = m_j = np_j$. Discuss how you obtain minimum chi-square estimate for θ. Does minimum chi-square method necessarily yield a sufficient statistic even if it exists ? *20*

(b) (i) मान लीजिए कि X तथा Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = C\ .\ \exp\{-(4x^2 + 9y^2 - xy)\},$$

है, जहाँ C एक अचर है । E(X), V(X), E(Y), V(Y) और X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक को ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि स्वतंत्र यादृच्छिक चर $X_1, X_2, ..., X_6$ इस प्रकार हैं कि

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2},\ i = 1, 2, ..., 6 \text{ है, तब}$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{6} X_i = 4\right]$$

का मान प्राप्त कीजिए ।

(i) Let the joint probability density function of X and Y be

$$f(x, y) = C\ .\ \exp\{-(4x^2 + 9y^2 - xy)\},$$

where C is a constant. Find E(X), V(X), E(Y), V(Y) and the correlation coefficient between X and Y.

(ii) If $X_1, X_2, ..., X_6$ are independent random variables such that

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2},\ i = 1, 2, ..., 6,$$

then obtain the value of

$$P\left[\sum_{i=1}^{6} X_i = 4\right].$$

10+5=15

(c) निम्नलिखित आँकड़े एक यात्री को उसके गन्तव्य तक पहुँचने के लिए बस को पकड़ने के लिए किए गए प्रतीक्षा समय (मिनटों में) को दर्शाते हैं :

दिन	समय	दिन	समय
1	23	11	14
2	25	12	14
3	12	13	16
4	07	14	19
5	17	15	23
6	16	16	24
7	13	17	12
8	26	18	18
9	27	19	11
10	12	20	08

साइन-परीक्षण का 0·05 सार्थकता स्तर पर उपयोग करते हुए बस संचालकों के द्वारा दावा कि यात्रियों को बस को पकड़ने के लिए 15 मिनट से अधिक प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ती, का परीक्षण कीजिए । [दिया गया है $Z_{(0 \cdot 025)} = 1 \cdot 96$, $Z_{(0 \cdot 05)} = 1 \cdot 645$]

The following data present the time (in minutes), that a commuter had to wait to catch a bus to reach his destination :

Days	Time	Days	Time
1	23	11	14
2	25	12	14
3	12	13	16
4	07	14	19
5	17	15	23
6	16	16	24
7	13	17	12
8	26	18	18
9	27	19	11
10	12	20	08

Use the sign-test at 0·05 level of significance to test the claim of the bus operators that commuters do not have to wait for more than 15 minutes before the bus is made available to them. *15*

[Given $Z_{(0 \cdot 025)} = 1 \cdot 96$, $Z_{(0 \cdot 05)} = 1 \cdot 645$]

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) सामान्य रैखिक निदर्श को प्रचलित कल्पनाओं सहित परिभाषित कीजिए । यदि

$$y_1 = \beta_1 + u_1$$
$$y_2 = -\beta_1 + \beta_2 + u_2$$
$$y_3 = -\beta_2 + u_3,$$

जहाँ u_1, u_2, u_3 परस्पर स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जिनका माध्य शून्य तथा प्रसरण σ^2 है, तो β_1 और β_2 के न्यूनतम वर्ग आकलकों को ज्ञात कीजिए ।

Define general linear model with usual assumptions. If

$$y_1 = \beta_1 + u_1$$
$$y_2 = -\beta_1 + \beta_2 + u_2$$
$$y_3 = -\beta_2 + u_3,$$

where u_1, u_2, u_3 are mutually independent random variables with mean zero and variance σ^2, then find the least square estimators of β_1 and β_2. *10*

(b) दिया गया है कि $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, जहाँ $\boldsymbol{\mu} = (2, 4, 3)'$ और

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

(i) X_1 का X_2 और X_3 पर समाश्रयण फलन ज्ञात कीजिए, और

(ii) X_2 और X_3 के दिए होने पर X_1 के सप्रतिबंध प्रसरण की गणना कीजिए ।

Given $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, where $\boldsymbol{\mu} = (2, 4, 3)'$ and

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

(i) find the regression function of X_1 on X_2 and X_3, and

(ii) compute the conditional variance of X_1 given X_2 and X_3. *10*

(c) एकसमानता परीक्षण क्या है ? व्याख्या कीजिए कि इसका उपयोग इष्टतम आकृति और आकार ज्ञात करने के लिए कैसे किया जा सकता है ।

What is a uniformity trial ? Explain how it can be used to determine optimum shape and size. *10*

(d) एक 2^6 – बहु-उपादानी प्रयोग में, मुख्य खंडक इस प्रकार दिया गया है :

(1), ab, cd, ef, ace, abef, abcd, bce,
cdef, acf, ade, abcdef, bde, bcf, adf, bdf.

संकरित प्रभावों की पहचान कीजिए ।

In a 2^6 – factorial experiment, the key block is given as :

(1), ab, cd, ef, ace, abef, abcd, bce,
cdef, acf, ade, abcdef, bde, bcf, adf, bdf.

Identify the confounded effects. *10*

(e) यदि x और y के विचरण गुणांक समान हैं और x और y के बीच सहसंबंध गुणांक $\rho = \frac{2}{3}$ है, तो अनुपात आकलक की दक्षता सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श के माध्य के सापेक्ष परिकलित कीजिए ।

If the coefficients of variation of x and y are equal and the correlation coefficient between x and y is $\rho = \frac{2}{3}$, compute the efficiency of ratio estimator relative to the mean of a simple random sample. *10*

Q6. (a) द्विधा वर्गीकृत आँकड़ों के एक समूह, जिसमें कारक A के k स्तर हैं और कारक B के r स्तर हैं, प्रत्येक कोष्ठक में एक प्रेक्षण है । दर्शाइए कि त्रुटि विपर्यासों की कुल संख्या $(r-1)(k-1)$ है ।

In a set of two-way classified data according to k levels of factor A and r levels of factor B, there is one observation in each cell. Show that the total number of error contrasts is $(r-1)(k-1)$. *15*

(b) द्वि-चरण प्रतिचयन तकनीक का उदाहरणों सहित वर्णन कीजिए । प्रतिस्थापन रहित द्वि-चरण प्रतिचयन के अन्तर्गत प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण प्राप्त कीजिए । इससे प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण :

(i) स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन, एवं

(ii) गुच्छ प्रतिचयन

के अन्तर्गत निकालिए ।

Describe with examples the technique of two-stage sampling. Obtain the variance of the sample mean under two-stage sampling without replacement. Hence, deduce the variance of the sample mean under :

(i) Stratified random sampling, and

(ii) Cluster sampling *20*

(c) (i) यदि $X_1 = Y_1 + Y_2,\ X_2 = Y_2 + Y_3,\ X_3 = Y_3 + Y_1$, जहाँ Y_1, Y_2 और Y_3 असहसंबंधित यादृच्छिक चर हैं तथा इनमें से प्रत्येक का माध्य शून्य एवं मानक विचलन एक है, तो X_3 और X_1, X_2 के बीच बहुसहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

(ii) मान लीजिए कि **X** एक 3-विमीय यादृच्छिक सदिश है जिसका परिक्षेपण आव्यूह

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ है ।}$$

प्रथम मुख्य घटक का एवं इसके द्वारा वर्णित किए गए संपूर्ण परिवर्तनशीलता के भाग का निर्धारण कीजिए ।

(i) If $X_1 = Y_1 + Y_2,\ X_2 = Y_2 + Y_3,\ X_3 = Y_3 + Y_1$, where Y_1, Y_2 and Y_3 are uncorrelated random variables and each of which has zero mean and unit standard deviation, find the multiple correlation coefficient between X_3 and X_1, X_2.

(ii) Let **X** be a 3-dimensional random vector with dispersion matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Determine the first principal component and the proportion of the total variability that it explains. *7+8=15*

Q7. (a) किसी बी.आई.बी.डी. (BIBD), जहाँ $v = b = 4,\ r = k = 3,\ \lambda = 2$ और $N = 12$, के लिए दिए गए निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :

उपचार	खण्ड			
	1	2	3	4
1	73	74	–	71
2	–	75	67	72
3	73	75	68	–
4	75	–	72	75

अभिकल्पना का विश्लेषण कीजिए । [दिया गया है : $F_{3,5}(0{\cdot}05) = 5{\cdot}41$]

Consider the following data given for a BIBD with $v = b = 4$, $r = k = 3$, $\lambda = 2$ and $N = 12$:

Treatment	Block 1	2	3	4
1	73	74	–	71
2	–	75	67	72
3	73	75	68	–
4	75	–	72	75

Analyse the design. [Given that : $F_{3, 5}(0 \cdot 05) = 5 \cdot 41$] *15*

(b) (i) एक द्विचर प्रसामान्य समष्टि BVN $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ से लिए गए आमाप $n = 3$ के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का न्यास मैट्रिक्स

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ है ।}$$

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ के विरुद्ध निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, का परीक्षण 10% सार्थकता-स्तर पर कीजिए, जहाँ $\boldsymbol{\mu}'_0 = (8, 5)$ है ।

[आपको दिया गया है : $F_{0 \cdot 10; 2, 1} = 49 \cdot 5$, $F_{0 \cdot 10; 1, 2} = 8 \cdot 53$]

(ii) मान लीजिए कि दो यादृच्छिक सदिशों $\mathbf{X}_1$ और $\mathbf{X}_2$, जो एक समान सहप्रसरण आव्यूह Σ, किन्तु सम्भवत: भिन्न माध्य सदिशों $\boldsymbol{\mu}_1$ और $\boldsymbol{\mu}_2$ के साथ द्विचर प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करते माने जाते हैं, पर $n_1 = 11$ और $n_2 = 12$ प्रेक्षण बनाए जाते हैं । प्रतिदर्श माध्य सदिश और संयुक्त सहप्रसरण आव्यूह हैं :

$$\overline{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{संयुक्त}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

महालानोबिस प्रतिदर्श दूरी D^2 और फिशर के रैखिक विविक्तकर फलन को प्राप्त कीजिए । प्रेक्षण $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ को या तो समष्टि Π_1 या Π_2 को निर्दिष्ट कीजिए ।

(i) The data matrix of a random sample of size $n = 3$ from a bivariate normal population BVN $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ is

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Test the null hypothesis $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ against $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, where $\boldsymbol{\mu}'_0 = (8, 5)$, at 10% level of significance.

[You are given : $F_{0 \cdot 10; 2, 1} = 49 \cdot 5$, $F_{0 \cdot 10; 1, 2} = 8 \cdot 53$]

(ii) Suppose $n_1 = 11$ and $n_2 = 12$, observations are made on two random vectors $\mathbf{X}_1$ and $\mathbf{X}_2$ which are assumed to have bivariate normal distribution with a common covariance matrix Σ, but possibly different mean vectors $\boldsymbol{\mu}_1$ and $\boldsymbol{\mu}_2$. The sample mean vectors and pooled covariance matrix are

$$\overline{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overline{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ S_{pooled} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obtain Mahalanobis sample distance D^2 and Fisher's linear discriminant function. Assign the observation $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ to either population Π_1 or Π_2. *10+10=20*

(c) N आकार की समष्टि से n आकार का एक प्रतिदर्श समान प्रायिकता एवं प्रतिस्थापन रहित के साथ चुना गया । मान लीजिए कि $\hat{\overline{Y}}_N = \sum_{r=1}^{n} a_r y_r$ समष्टि माध्य $\overline{Y}_N$ का कोई रैखिक आकल है, जहाँ a_r अचर हैं और y_r rवें ड्रा पर प्रतिदर्श में सम्मिलित इकाई का मान है ।

(i) दर्शाइए कि $\hat{\overline{Y}}_N$, $\overline{Y}_N$ का एक अनभिनत आकल है यदि और केवल यदि

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = 1$$

(ii) उपर्युक्त प्रतिबंध के अन्तर्गत

$$V(\hat{\overline{Y}}_N) = \frac{S^2}{N} \left[N \sum_{r=1}^{n} a_r^2 - 1 \right]$$

(iii) यदि $a_r = \frac{1}{n}$, तो n के किस मान के लिए प्रतिस्थापन रहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन में प्रतिदर्श माध्य का यह प्रसरण उसी आकार के प्रतिस्थापन सहित लिए गए यादृच्छिक प्रतिदर्श के माध्य के प्रसरण का बिल्कुल आधा होगा ?

A sample of size n is drawn with equal probability and without replacement from a population with size N. Let $\hat{Y}_N = \sum_{r=1}^{n} a_r y_r$ be any linear estimate of the population mean $\overline{Y}_N$, where a_r are constants and y_r denotes the value of the unit included in the sample at the r^{th} draw.

(i) Show that $\hat{Y}_N$ is an unbiased estimate of $\overline{Y}_N$ if and only if

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = 1$$

(ii) Under above condition

$$V(\hat{Y}_N) = \frac{S^2}{N}\left[N \sum_{r=1}^{n} a_r^2 - 1\right]$$

(iii) If $a_r = \frac{1}{n}$, for what value of n may this variance of the sample mean in simple random sampling without replacement be exactly half the variance of the mean of a random sample of the same size taken with replacement ? *15*

Q8. (a) (i) लांबिक बहुपद क्या हैं ? 'p' घातीय लांबिक बहुपद का आसंजन आप कैसे करेंगे ?

(ii) निदर्श $\underset{n \times 1}{\mathbf{Y}} = \underset{n \times k}{X} \underset{k \times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n \times 1}{\mathbf{u}}$, $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 I_n$, जहाँ $\underset{n \times k}{X}$ कोटि k (k < n) का एक आव्यूह है, के लिए

$$E[\mathbf{Y}'(I_n - X(X'X)^{-1}X')\mathbf{Y}]$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

(i) What are orthogonal polynomials ? How do you fit an orthogonal polynomial of degree 'p' ?

(ii) For the model $\underset{n \times 1}{\mathbf{Y}} = \underset{n \times k}{X} \underset{k \times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n \times 1}{\mathbf{u}}$, $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 I_n$, where $\underset{n \times k}{X}$ is a matrix of rank k (k < n), find out the value of

$$E[\mathbf{Y}'(I_n - X(X'X)^{-1}X')\mathbf{Y}].$$

10+10=20

(b) तीन फार्मों की एक कृत्रिम समष्टि पर विचार कीजिए । उनकी चयन प्रायिकताएँ और गेहूँ उत्पादन ('000 टन में) निम्न प्रकार हैं :

फार्म इकाई (i)	:	1	2	3
चयन प्रायिकता (p_i)	:	0·3	0·2	0·5
गेहूँ उत्पादन (y_i)	:	11	6	25

आकार 2 के सभी संभावित प्रतिदर्शों को प्रतिस्थापन सहित निकालिए (क्रम पर विचार किया जाना है) । दर्शाइए कि कुल गेहूँ उत्पादन का हॉर्विट्ज़-थॉम्प्सन आकलक अनभिनत है ।

Consider an artificial population of three farms. Their selection probabilities and the wheat production (in '000 tons) are as follows :

Farm unit (i)	:	1	2	3
Selection probability (p_i)	:	0·3	0·2	0·5
Wheat production (y_i)	:	11	6	25

Draw all possible samples of size 2 with replacement (order is to be considered). Show that Horvitz-Thompson estimator of total wheat production is unbiased. *15*

(c) लुप्त खंड तकनीक क्या है ? किसी लैटिन वर्ग अभिकल्पना के लिए लुप्त मान सूत्र व्युत्पन्न कीजिए । ऐसी अभिकल्पना का विश्लेषण करने के लिए आप कैसे अग्रसर होंगे ?

What is a missing plot technique ? Derive the missing value formula for a Latin Square Design. How would you proceed to analyse such a design ? *15*